

Mécanique Analytique

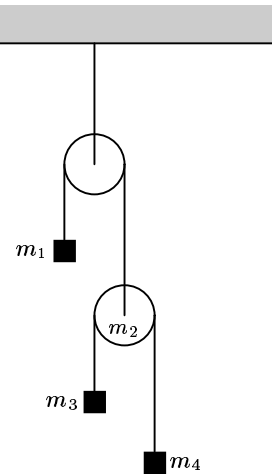
Série 3

3/4 novembre 2004

Exercice 1 : machine d'Atwood

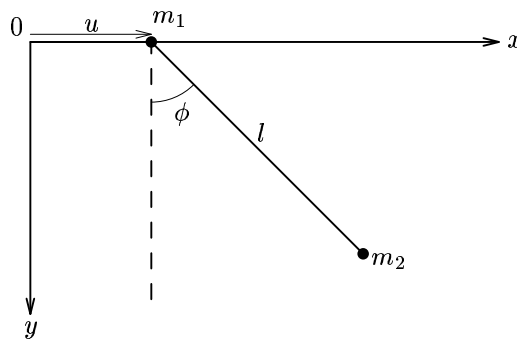
Considérer le dispositif montré dans la figure soumis à la seule action de la pesanteur.

- (i) Donner les contraintes de ce système.
- (ii) Ecrire le Lagrangien de ce système en choisissant les positions des masses m_1 et m_3 comme coordonnées généralisées.
- (iii) Dériver les équations du mouvement de ces masses et déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3 .



Exercice 2 : pendule plan

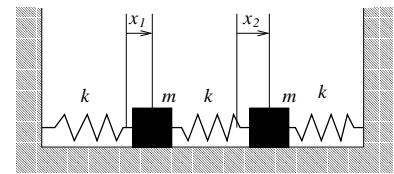
Un pendule plan de longueur l et de masse m_2 est soumis à l'action de la pesanteur. Son point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x .



- (i) Ecrire la fonction lagrangienne de ce système en termes des coordonnées généralisées u et ϕ ,
- (ii) Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer les constantes du mouvement.
- (iii) Considérer les conditions initiales $u(0) = 0$, $\phi(0) = \alpha$, $\dot{u}(0) = v_0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$:
 - obtenir une expression donnant $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$,
 - établir l'équation différentielle du 2e ordre décrivant l'évolution de $\phi(t)$ et la résoudre dans l'approximation des oscillations lentes et de faible amplitude (considérer ϕ petit et négliger les termes du type $\dot{\phi}^2\phi$).

Exercice 3 : système de ressorts

On considère deux masses m reliées entre elles par un ressort de raideur k , qui glissent sans frottement sur un plan horizontal. Chaque masse est de plus reliée par un ressort de raideur k à un mur. L'allongement des trois ressorts est nul quand $x_1 = x_2 = 0$ (voir figure).



- (i) Ecrire le Lagrangien du système.
- (ii) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange du système.